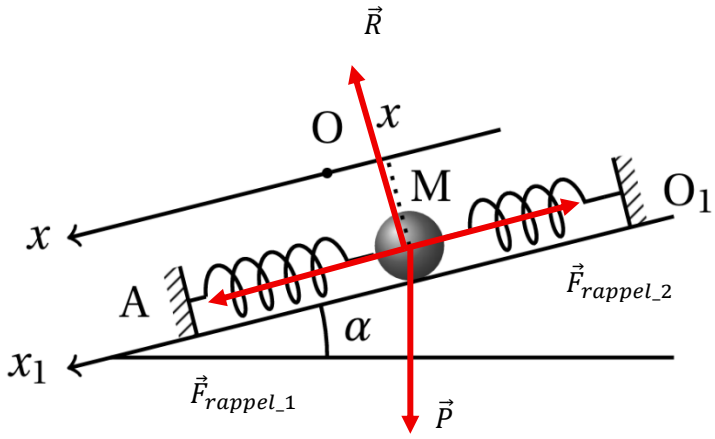
Travaux dirigés 8 :

Correction

Exercice 1 :

1. 

2. On applique le PFD :

$$\sum_i \vec{F_i} = 0$$

$$\vec{R} + \vec{P} + \vec{T_1} + \vec{T_2} = \vec{0}$$

Projection sur l'axe x :

$$-mgsin(\alpha) - k\Delta l_1 + k\Delta l_2 = 0$$

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 - \frac{mgsin(\alpha)}{k}$$

Or on a :

$$d = l_1 + l_2 = (\Delta l_1 + l_0) + (\Delta l_2 + l_0)$$

Soit :

$$\Delta l_2 = d - \Delta l_1 - 2l_0$$

Au final on trouve :

$$\Delta l_1 = \frac{1}{2k}\big(k(d - 2l_0) - mgsin(\alpha)\big)$$

$$\Delta l_2 = \frac{1}{2k}\big(k(d - 2l_0) + mgsin(\alpha)\big)$$

3. Appliquons le PFD :

$$\vec{R} + \vec{P} + \overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{T_2} = m\vec{a}$$

Projetons sur x :

$$-mgsin(\alpha) - k(\Delta l_1 + x) + k(\Delta l_2 - x) = m\ddot{x}$$

Or : $-mgsin(\alpha) - k\Delta l_1 + k\Delta l_2 = 0$, alors :

$$-kx - kx = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + 2kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{2k}{m}x = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\left(\frac{2k}{m}\right)}$$

La solution est de la forme :

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\, sin(\omega_0 t)$$

En utilisant la condition initiale $x(0) = 0$

$$x(0) = A = 0$$

En utilisant la condition initiale $v(0) = v_0$

$$\dot{x}(0) = B\omega_0 = v_0$$

D'où :

$$B = \frac{v_0}{\omega_0}$$

La solution est donc :

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\, sin(\omega_0 t)$$

<u>Exercice 2 : Pendule simple, étude énergétique :</u>

1. $E_{pp} = mgl\,(1 - cos\theta)$. L'Epp est maximale quand l'angle est maximal, et minimale quand l'angle est nul.
2. $E_c = \frac{1}{2}m\,v^2 = \frac{1}{2}m\,(l\dot{\theta})^2$. L'Ec est minimale quand l'angle est maximal, et maximal quand l'angle est nul.
3. L'énergie mécanique vaut :

$$E_M = E_c + E_{pp} = \frac{1}{2}m\,v^2 + mgl\,(1 - cos\theta) = \frac{1}{2}m\,(l\dot{\theta})^2 + mgl\,(1 - cos\theta)$$

L'énergie mécanique est conservée car il n'y a pas de frottement.

4. Comme l'énergie mécanique est conservée, alors sa dérivée est nulle.

$$\frac{dE_M}{dt} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\left(l\dot{\theta}\right)^2 + mgl\left(1 - cos\theta\right)\right) = 0$$

$$\frac{1}{2}ml^2l2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgl\,\dot{\theta}sin\theta = 0$$

$$\dot{\theta}\left(ml^2\ddot{\theta} + mgl\,sin\theta\right) = 0$$

On ne garde que la solution qui a du sens physiquement :

$$l^2\ddot{\theta} + gl\,sin\theta = 0$$

Approximation de petits angles :

$$l^2\ddot{\theta} + gl\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

On retrouve l'expression d'un oscillateur harmonique de pulsation :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

5. La solution est de la forme :

$$\theta(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\,sin(\omega_0 t)$$

Utilisons les conditions initiales. Commençons par $\theta(0) = \theta_0$

$$\theta(0) = A = \theta_0$$

Cela nous donne :

$$\theta(t) = \theta_0\cos(\omega_0 t) + B\,sin(\omega_0 t)$$

Ensuite, continuons par $\dot{\theta}(0) = 0$

$$\dot{\theta}(0) = B\omega_0 = 0$$

Finalement on obtient :

$$\theta(t) = \theta_0\cos(\omega_0 t)$$